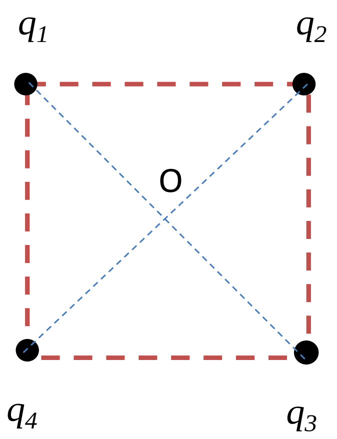
Problema 2

Cuatro cargas puntuales de módulo 2μC se encuentran en los vértices de un cuadrado de 4 m de lado. Se sabe que dos de ellas son positivas y una negativa. No se sabe el signo de la cuarta.

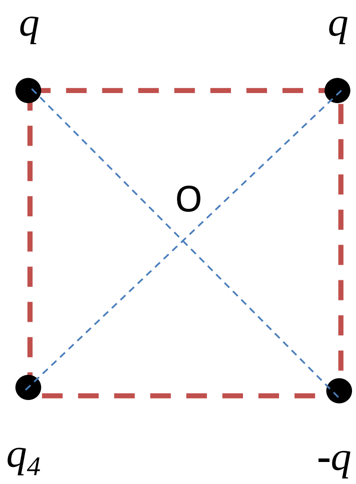
a) ¿Cuál debe ser la configuración de cargas para que el trabajo para traer otra carga puntual de valor 3μC, desde el infinito hasta el punto de intersección de las diagonales del cuadrado, sea nulo?

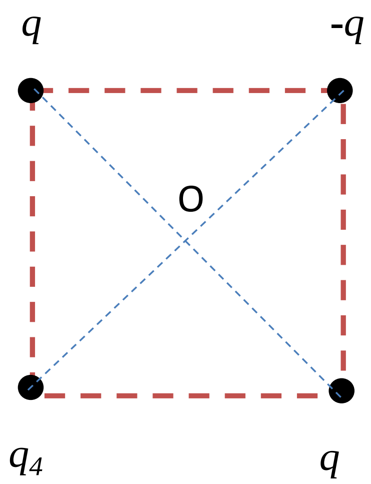
b) ¿Cuál es la energía almacenada en la configuración original de las cuatro cargas? ¿En cuánto cambia la energía almacenada cuando está la quinta carga colocada?

<u>Solución:</u>

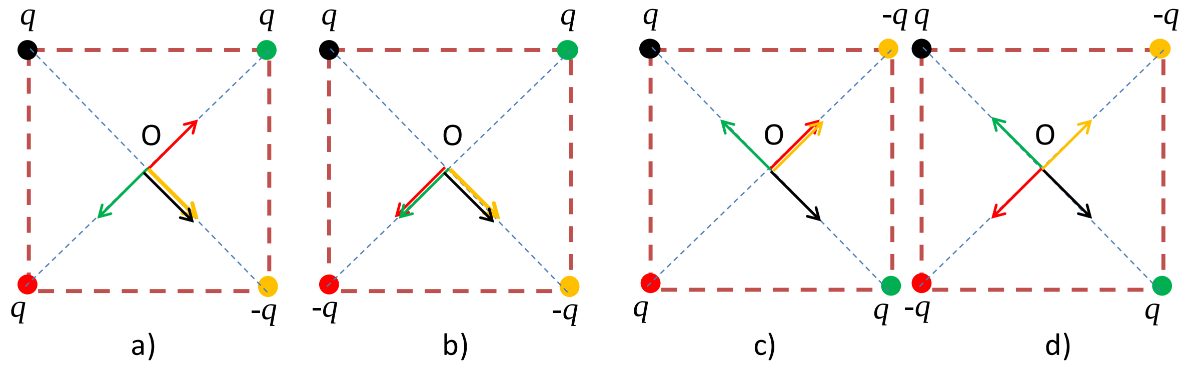


Primero hacemos un esquema para ver cómo puede ser más sencillo plantear el problema. Sabemos que $|q_1| = |q_2| = |q_3| = |q_4| = q$ y podemos suponer que no sabemos el signo de cualquiera. Se me ocurre elegir como carga de signo a determinar a la carga 4. El enunciado dice que dos son positivas y una negativa. Rehacemos el esquema pensando en las posibilidades.





Solo dibujé estas dos. ¿Por qué? Una vez entendido esto, sigamos. Analicemos cómo sería el campo eléctrico en O considerando las dos configuraciones y las dos posibilidades de signo de la carga q_4. ¿Para qué? Para comprender más a fondo el problema…. Veamos las cuatro posibilidades. Observen que la q_4 la pintamos de rojo, a la que sabemos es negativa de amarillo y a las que sabemos que son positivas de negro y verde.



¿Sirven estos esquemas para resolver el problema que se plantea?

El enunciado pide que debemos determinar la configuración de cargas para que no se requiera trabajo para traer otra carga desde el infinito hasta el punto O. Eso es equivalente a que la diferencia de potencial producida por la configuración de cargas entre el punto O y el infinito sea nula. En lugar de plantear las situaciones a)-d), podemos considerar solamente 2 dejando "flotante" el signo de q_4. Por el principio de superposición podemos sumar las diferencias de potencial de cada una de las cargas. Recordemos que para una carga q_0 ubicada en el punto $\vec{r}\,'$, la diferencia de potencial entre los puntos $\vec{r}_A$ y $\vec{r}_B$ está dado por

$$V(\vec{r}_A)-V(\vec{r}_B)=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r}_A-\vec{r}\,'|}-\frac{1}{|\vec{r}_B-\vec{r}\,'|}\right] \quad (1)$$

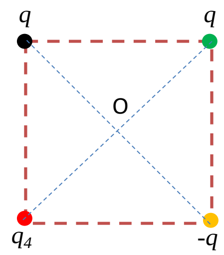
Si tomamos $\vec{r}_B \to \infty$, mientras q_0 no esté en el infinito

$$V(\vec{r}_A)-V(\infty)=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}_A-\vec{r}\,'|} \quad (2)$$

Supongamos que el lado del cuadrado es $a=4\text{m}$. Elijamos el origen de coordenadas en el punto O. La distancia entre las cargas y el punto de intersección de las diagonales resulta (por el Teorema de Pitágoras) $\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{4\text{m}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\text{ m}$ para todas las cargas, es decir, $|\vec{r}\,'|={}^{a}\!/\!_{\sqrt{2}}$. Nos limitaremos, entonces a las dos situaciones siguientes

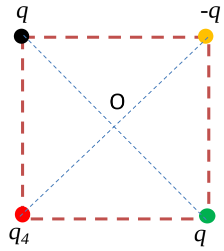
Primera situación:

$$V(\text{O})-V(\infty)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{a/\sqrt{2}}+\frac{q}{a/\sqrt{2}}-\frac{q}{a/\sqrt{2}}+\frac{q_4}{a/\sqrt{2}}\right] \quad (3)$$

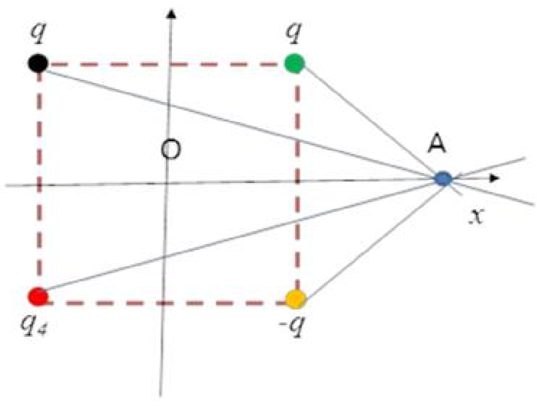


Es decir, $q_4=-q$

Segunda situación: No es necesario rehacer la cuenta porque es "la misma". O sea, $q_4 = -q$



Moraleja: La cuarta carga debe ser negativa y no importa cómo están distribuidas para que $V(\mathrm{O}) - V(\infty) = 0$. En el primer caso, el valor del campo eléctrico en el punto O resulta máximo y en el segundo es nulo.

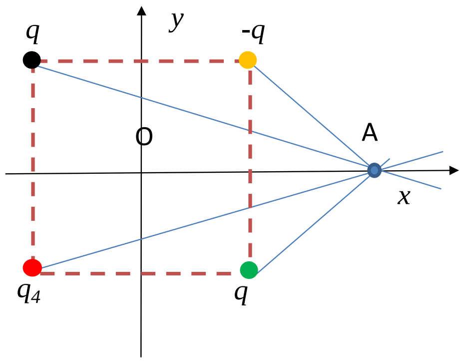


Para convencernos de que ambos resultados son correctos, calculemos la circulación del campo eléctrico desde el infinito hasta el punto O en las dos situaciones (es más complicado pero vale la pena intentarlo!!). Para ello debemos calcular el campo eléctrico sobre alguna curva que vaya desde el infinito al punto O (es decir, no es necesario calcularlo en todo el espacio). Lo calcularemos sobre el eje x en el punto A (x_A,0,0) para cada carga y aplicaremos el principio de superposición. Después haremos la circulación desde el infinito hasta O.

$$\vec{E}(x,0,0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\left(x+\frac{a}{2}\right)\breve{e}_x + \left(0-\frac{a}{2}\right)\breve{e}_y}{\left[\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]^{3/2}} + \frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)\breve{e}_x + \left(0-\frac{a}{2}\right)\breve{e}_y}{\left[\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)\breve{e}_x + \left(0+\frac{a}{2}\right)\breve{e}_y}{\left[\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{\left(x+\frac{a}{2}\right)\breve{e}_x + \left(0+\frac{a}{2}\right)\breve{e}_y}{\left[\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]^{3/2}}\right] \tag{4}$$

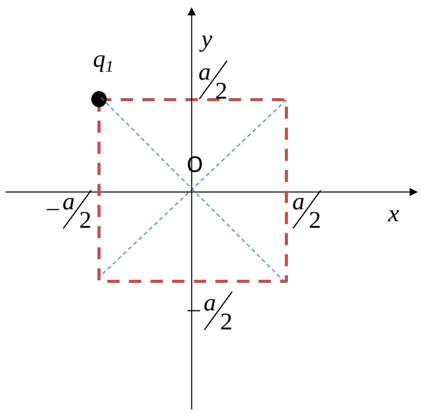
$$E_x(x,0,0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\left(x+\frac{a}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]^{3/2}} + \frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)}{\left[\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)}{\left[\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{\left(x+\frac{a}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]^{3/2}}\right] = 0 \tag{5}$$

Entonces $\int_{\infty}^{O} \vec{E}\cdot\vec{dl} = 0$!! en la primera situación (como esperábamos). En la segunda situación, no vamos a calcularlo matemáticamente. Grafiquen los campos y verifiquen que se cumple lo mismo. **<u>Pregunta:</u>** ¿qué hubiera sucedido si hubiéramos considerado un camino a lo largo del eje *y*?



b) A esta altura ya nos olvidamos de lo que pedía el punto b)!!!! Para calcular la energía almacenada en la configuración de 4 cargas que cumplen con $V(\mathrm{O})-V(\infty)=0$, podemos calcular el trabajo para llevarlas desde el infinito hasta su posición final. Para distinguirlas, las llamaremos q_j con j=1,2,3,4. Lo vamos a hacer en forma genérica y luego consideraremos los valores de las cargas.

Comencemos con la carga q_1. Como no hay ninguna carga en la región, el trabajo para llevarla al punto $\left(-a/2, a/2\right)$ será nulo. Esta carga crea un campo eléctrico en todo el espacio

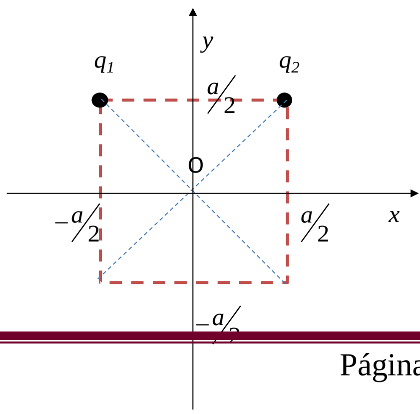


$$\vec{E}_1(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 \frac{\left(x+a/2\right)\breve{e}_x + \left(y-a/2\right)\breve{e}_y + z\,\breve{e}_z}{\left[\left(x+a/2\right)^2 + \left(y-a/2\right)^2 + z^2\right]^{3/2}} \qquad (6)$$

y una **diferencia de potencial entre cualquier punto A y el infinito**:

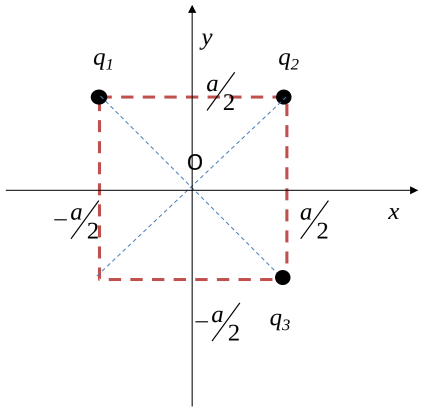
$$\Delta V_1(x_A,y_A,z_A) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 \frac{1}{\left|\vec{r}_A - \vec{r}_{q_1}{}'\right|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 \frac{1}{\left[\left(x_A+a/2\right)^2 + \left(y_A-a/2\right)^2 + z_A{}^2\right]^{1/2}} \qquad (7)$$

Al llevar la carga q_2 al punto $\left(a/2, a/2, 0\right)$ se deberá realizar un trabajo (aunque solo se sabe si debemos hacer trabajo o el campo realiza trabajo cuando sepamos el valor de la carga). Ese trabajo se puede calcular como



$$W_{q_2}=q_2\Delta V_1\left(a/2,a/2,0\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_1q_2\frac{1}{\left[a^2\right]^{1/2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_1q_2\frac{1}{a} \quad (8)$$

Este es el trabajo para formar la configuración de las dos cargas. Esta configuración de dos cargas crea una diferencia de potencial en todo el espacio respecto de cualquier punto que se puede calcular (por el principio de superposición) como la suma de las diferencias de potencial generada por cada carga. La diferencia de potencial que genera la carga q_2 en un punto genérico $\left(x_A,y_A,z_A\right)$ es



$$\Delta V_2\left(x_A,y_A,z_A\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_2\frac{1}{\left[\left(x_A-a/2\right)^2+\left(y_A-a/2\right)^2+z_A{}^2\right]^{1/2}} \quad (9)$$

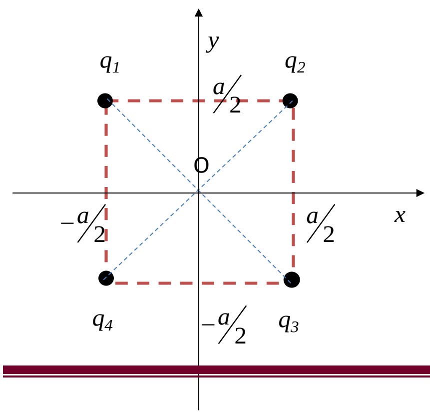
Si vamos a traer a la carga q_3 desde "el infinito" hasta el punto $\left(a/2,-a/2,0\right)$, el trabajo necesario será

$$W_{q_3}=q_3\Delta V_1\left(a/2,-a/2,0\right)+q_3\Delta V_2\left(a/2,-a/2,0\right)=q_3\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{\left[2a^2\right]^{1/2}}+\frac{q_2}{\left[\left(-a\right)^2\right]^{1/2}}\right]= \quad (10)$$

$$=q_3\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}\left[\frac{q_1}{\sqrt{2}}+q_2\right]$$

Otra vez: esta carga q_3 crea una diferencia de potencial en todo el espacio

$$\Delta V_3\left(x_A,y_A,z_A\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_3\frac{1}{\left[\left(x_A-a/2\right)^2+\left(y_A+a/2\right)^2+z_A{}^2\right]^{1/2}} \quad (11)$$



Y el trabajo para traer a la cuarta carga hasta el punto $\left(-a/2,-a/2,0\right)$ será

$$W_{q_4} = q_4 \Delta V_1\left(-a/_2, -a/_2, 0\right) + q_4 \Delta V_2\left(-a/_2, -a/_2, 0\right) + q_4 \Delta V_3\left(-a/_2, -a/_2, 0\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_4 \frac{1}{\left[(-a)^2\right]^{1/2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_2 q_4 \frac{1}{\left[(-a)^2 + (-a)^2\right]^{1/2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_3 q_4 \frac{1}{\left[(-a)^2\right]^{1/2}} = \tag{12}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_4 \frac{1}{a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_2 q_4 \frac{1}{\sqrt{2}a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_3 q_4 \frac{1}{a}$$

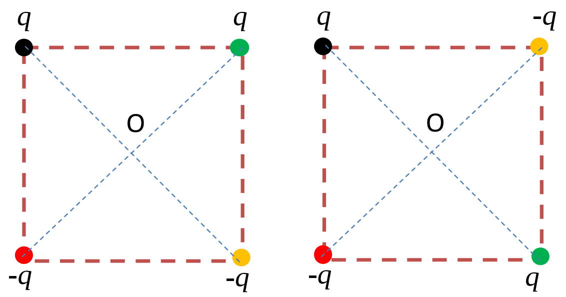
Entonces, el trabajo total para armar la configuración será

$$W = W_{q_2} + W_{q_3} + W_{q_4} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_2 \frac{1}{a} + q_3 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{a}\left[\frac{q_1}{\sqrt{2}} + q_2\right] + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_4 \frac{1}{a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_2 q_4 \frac{1}{\sqrt{2}a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_3 q_4 \frac{1}{a} = \tag{13}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[q_1 q_2 \frac{1}{a} + q_1 q_3 \frac{1}{\sqrt{2}a} + q_2 q_3 \frac{1}{a} + q_1 q_4 \frac{1}{a} + q_2 q_4 \frac{1}{\sqrt{2}a} + q_3 q_4 \frac{1}{a}\right]$$

Calculemos ahora la energía de las dos configuraciones. Calculamos el trabajo necesario para armar cada configuración.



Reemplazando en la ec.(13) para la primera configuración obtenida, el trabajo requerido para armar la configuración es

$$W_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[q^2 \frac{1}{a} - q^2 \frac{1}{\sqrt{2}a} - q^2 \frac{1}{a} - q^2 \frac{1}{a} - q^2 \frac{1}{\sqrt{2}a} + q^2 \frac{1}{a}\right] = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q^2 \frac{2}{\sqrt{2}a} \tag{14}$$

$$W_1 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q^2 \frac{2}{\sqrt{2}a} = -9\cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\cdot 4\cdot 10^{-12}\mathrm{C}^2 \frac{2}{\sqrt{2}\cdot 4\,\mathrm{m}} = -9\cdot\sqrt{2}\cdot 10^{-3}\,\mathrm{J} \simeq -12.73\,\mathrm{mJ}$$

En la segunda configuración

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-q^2 \frac{1}{a} + q^2 \frac{1}{\sqrt{2}a} - q^2 \frac{1}{a} - q^2 \frac{1}{a} + q^2 \frac{1}{\sqrt{2}a} - q^2 \frac{1}{a}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-4q^2 \frac{1}{a} + 2q^2 \frac{1}{\sqrt{2}a}\right] \tag{15}$$

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{a}\left[-4 + \sqrt{2}\right] = -9\cdot 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\cdot 4\cdot 10^{-12}\mathrm{C}^2 \frac{1}{4\mathrm{m}}\left[4 - \sqrt{2}\right] = -9\cdot\left[4 - \sqrt{2}\right]\cdot 10^{-3}\,\mathrm{J} \simeq \text{-}23.27\,\mathrm{mJ}$$

En los dos casos, el trabajo que hay que hacer es negativo. Eso significa que no debemos hacer trabajo para armar las configuraciones sino que, por lo contrario, el campo hace el trabajo. Se puede entender pensando que, por ejemplo, en la primera configuración, si primero traemos a la $q_1 = q$, debemos hacer trabajo (en contra del campo) para traer a la $q_2 = q$. Una vez que están esas dos, la $q_3 = -q$ se "siente atraída" por las cargas positivas (sin que hagamos trabajo). Y lo mismo para traer a la $q_4 = -q$. Para la segunda configuración, podemos hacer el mismo razonamiento.

Extra al problema: Observemos cómo se calcula el trabajo:

1. Aparecen todas las posibilidades en cuanto a la multiplicación de los valores de carga (todas las combinaciones). En 4 términos aparece la distancia a que corresponde a la distancia entre las cargas y en los otros dos términos aparece $\sqrt{2}a$ que corresponde a la distancia entre las cargas q_1q_3 y entre q_2q_4.

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1q_2}{\left|\vec{r}_{q_1}{}' - \vec{r}_{q_2}{}'\right|} + \frac{q_1q_3}{\left|\vec{r}_{q_1}{}' - \vec{r}_{q_3}{}'\right|} + \frac{q_2q_3}{\left|\vec{r}_{q_2}{}' - \vec{r}_{q_3}{}'\right|} + \frac{q_1q_4}{\left|\vec{r}_{q_1}{}' - \vec{r}_{q_4}{}'\right|} + \frac{q_2q_4}{\left|\vec{r}_{q_2}{}' - \vec{r}_{q_4}{}'\right|} + \frac{q_3q_4}{\left|\vec{r}_{q_3}{}' - \vec{r}_{q_4}{}'\right|}\right]$$

2. El resultado debería ser el mismo independientemente del orden en que traigamos las cargas. De acuerdo a cómo construimos la configuración, el primer término corresponde al trabajo para traer a la q_2 cuando la q_1 está presente. Pero si hubiéramos invertido el orden, el resultado hubiera sido el mismo. El mismo razonamiento puede ser aplicado a cada término. Por ejemplo, el quinto término tenía en cuenta el trabajo para traer la q_4 debido a la presencia de la q_2. Pero también puede considerarse como el trabajo para traer a la q_2 debido a la presencia de la q_4.

   Entonces podemos reescribir cada uno de los términos, por ejemplo:

$$\frac{q_1q_2}{\left|\vec{r}_{q_1}{}' - \vec{r}_{q_2}{}'\right|} = \frac{1}{2}\left[\frac{q_1q_2}{\left|\vec{r}_{q_1}{}' - \vec{r}_{q_2}{}'\right|} + \frac{q_2q_1}{\left|\vec{r}_{q_2}{}' - \vec{r}_{q_1}{}'\right|}\right]$$

   Con lo que se puede simplificar la expresión del trabajo para armar la configuración.

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_iq_j}{\left|\vec{r}_{q_i}{}' - \vec{r}_{q_j}{}'\right|}$$

   Como supusimos desde el principio de Electrostática, todo lo hacemos en condiciones cuasiestáticas (la variación de cinética es nula), por lo que la energía almacenada en la configuración está dada por

$$\Delta U = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{\left|\vec{r}_{q_i}\,' - \vec{r}_{q_j}\,'\right|}$$

Avancemos un poco más en cuanto al significado de cada término. Analicemos los términos $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1q_2}{\left|\vec{r}_{q_1}\,'-\vec{r}_{q_2}\,'\right|}+\frac{q_1q_3}{\left|\vec{r}_{q_1}\,'-\vec{r}_{q_3}\,'\right|}+\frac{q_1q_4}{\left|\vec{r}_{q_1}\,'-\vec{r}_{q_4}\,'\right|}\right]$. ¿Qué significa?

Si originalmente teníamos a la carga q_2, q_3, q_4 en las posiciones $\vec{r}_{q_2}\,', \vec{r}_{q_3}\,', \vec{r}_{q_4}\,'$, la carga q_1 ubicada en $\vec{r}_{q_1}\,'$ "verá" una diferencia de potencial respecto del infinito $\Delta V_{q_2,q_3,q_4}\left(\vec{r}_{q_1}\,'\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_2}{\left|\vec{r}_{q_1}\,'-\vec{r}_{q_2}\,'\right|}+\frac{q_3}{\left|\vec{r}_{q_1}\,'-\vec{r}_{q_3}\,'\right|}+\frac{q_4}{\left|\vec{r}_{q_1}\,'-\vec{r}_{q_4}\,'\right|}\right]$. . Las cargas q_2, q_3, q_4 son las responsables del mismo. O sea podemos escribir

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1q_2}{\left|\vec{r}_{q_1}\,'-\vec{r}_{q_2}\,'\right|}+\frac{q_1q_3}{\left|\vec{r}_{q_1}\,'-\vec{r}_{q_3}\,'\right|}+\frac{q_1q_4}{\left|\vec{r}_{q_1}\,'-\vec{r}_{q_4}\,'\right|}\right] = q_1\Delta V_{q_2,q_3,q_4}\left(\vec{r}_{q_1}\,'\right).$$

Análogamente

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_2q_3}{\left|\vec{r}_{q_2}\,'-\vec{r}_{q_3}\,'\right|}+\frac{q_2q_4}{\left|\vec{r}_{q_2}\,'-\vec{r}_{q_4}\,'\right|}\right] = q_2\Delta V_{q_3,q_4}\left(\vec{r}_{q_2}\,'\right)$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3q_4}{\left|\vec{r}_{q_3}\,'-\vec{r}_{q_4}\,'\right|} = q_3\Delta V_{q_4}\left(\vec{r}_{q_4}\,'\right)$$

Haciendo uso de estos trucos matemáticos, podemos escribir

$$\Delta U = \frac{1}{2}\sum_{i<j} q_i\ \Delta V_j\left(\vec{r}_{q_i}\,'\right)$$

Que corresponde a la expresión que encontramos en los libros